ΑΣΚΗΣΗ 1

α. $\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + 12$ $\qquad x_1 > 0$

$\dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 - 12$ $\qquad$ όπου $\qquad x_2 > 0$

Βήμα 1.1

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow -2x_1 + 2x_2 + 12 = 0$

$\Rightarrow 2x_2 = 2x_1 - 12$

$\Rightarrow x_2 = x_1 - 6$ $\quad$ άρα $\quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 1 > 0$

αύξουσα συνάρτηση

Βήμα 1.2

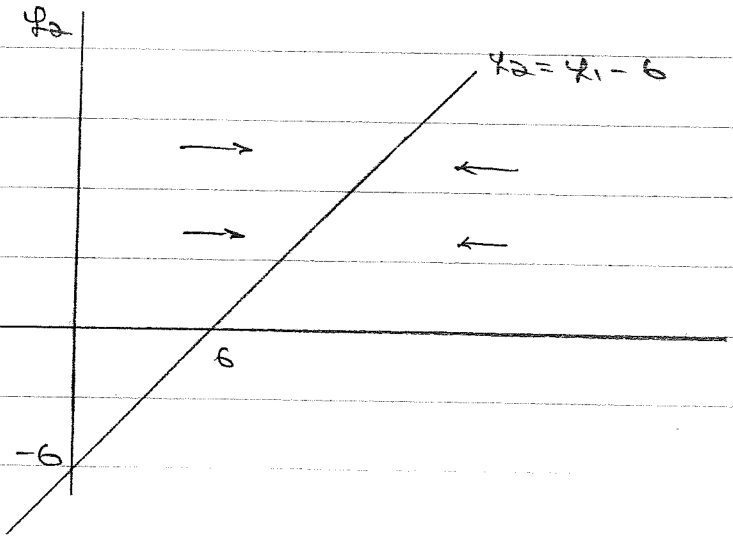
Βέλη της κίνησης:

$\dot{x}_1 > 0$ (βέλη δεξιά) $\Rightarrow -2x_1 + 2x_2 + 12 > 0$

$\Rightarrow x_2 > x_1 - 6$: Βέλη δεξιά πάνω από τη γραμμή $x_2 = x_1 - 6$

$\dot{x}_1 < 0$ (βέλη αριστερά) $\Rightarrow -2x_1 + 2x_2 + 12 < 0$

$\Rightarrow x_2 < x_1 - 6$: Βέλη αριστερά κάτω από τη γραμμή $x_2 = x_1 - 6$



$x_1 = 0 \quad x_2 = -6$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 6$

Βήμα 2.1:

$\dot{y}_2 = 0 \Rightarrow y_1 - 3y_2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 3y_2 = y_1 - 12$

$\Rightarrow y_2 = \frac{y_1}{3} - 4$ άρα $\frac{\partial y_2}{\partial y_1} = \frac{1}{3} > 0$

Βήμα 2.2:

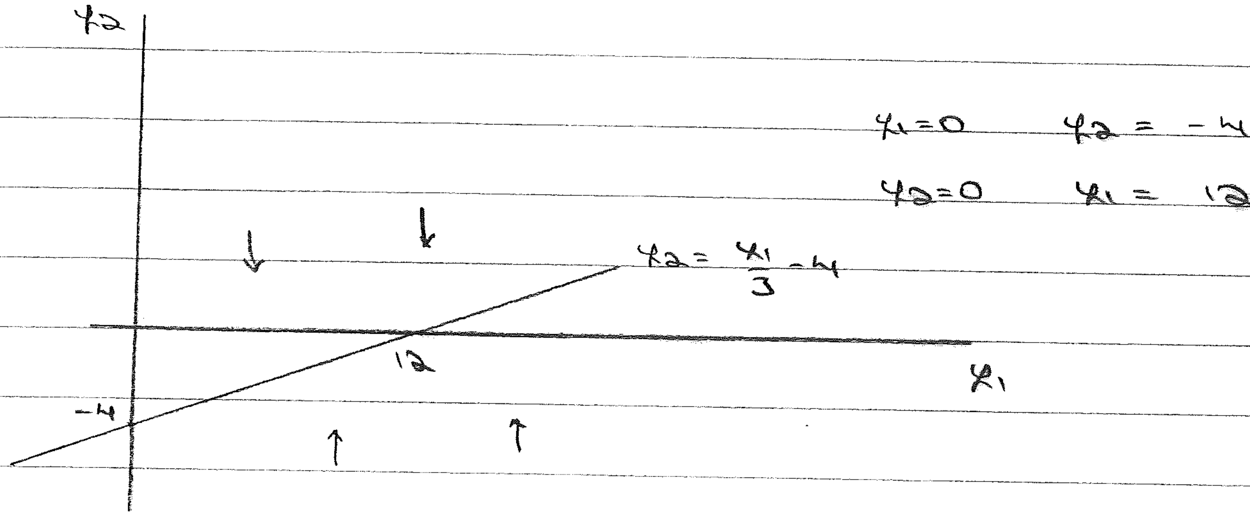
Βέλη της κίνησης:

$\dot{y}_2 > 0$ (βέλη πάνω) $\Rightarrow y_1 - 3y_2 - 12 > 0$

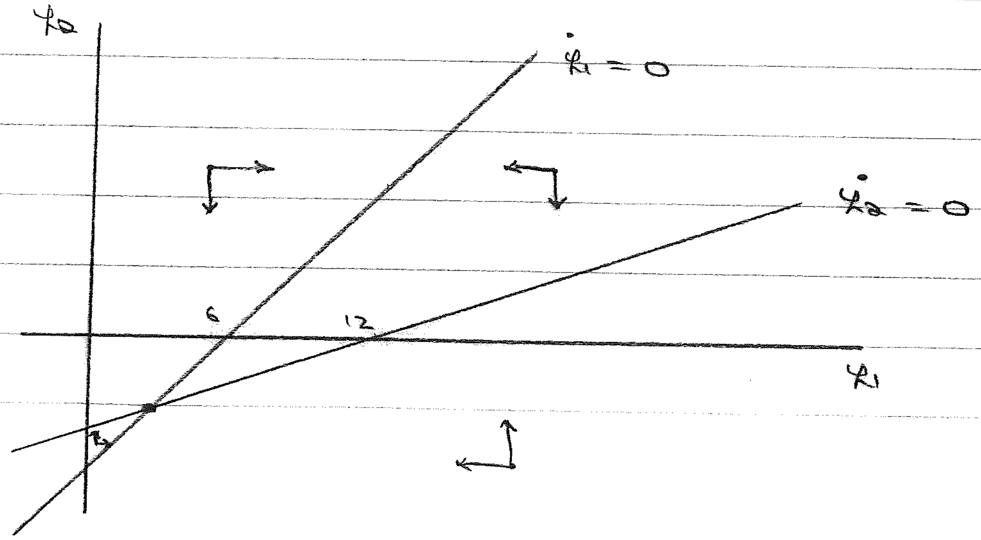
$\Rightarrow y_2 < \frac{y_1}{3} - 4$

$\dot{y}_2 < 0$ (βέλη κάτω) $\Rightarrow y_1 - 3y_2 - 12 < 0$

$\Rightarrow y_2 > \frac{y_1}{3} - 4$



ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



ΑΣΚΗΣΗ 2:

$y_0 = 10$

Από τα δεδομένα μας:

$y_1 = y_0 + (0{,}02) \cdot y_0 + 40$

$= (1{,}02) y_0 + 40$

$\Rightarrow \quad y_{t+1} = (1{,}02) \cdot y_t + 40$

Για την y_h: $\quad y_{t+1} = (1{,}02) y_t$

$\Rightarrow \quad y_{t+1} - (1{,}02) y_t = 0$

Άρα:

$y_h = c \cdot (1{,}02)^t$

Για την $\bar{y}_t = k$ και $\bar{y}_{t+1} = k$

Έτσι αντικαθιστώντας στη γενική:

$k = (1{,}02) \cdot k + 40$

$\Rightarrow \quad (0{,}02) \cdot k = -40$

$\Rightarrow \quad k = -2000$

$\Rightarrow \quad y_t = c \cdot (1{,}02)^t - 2000$

Για $t = 0$ $\quad y_0 = c - 2000$

$\Rightarrow \quad c = y_0 + 2000$

$\Rightarrow \quad y_t = (y_0 + 2000)(1{,}02)^t - 2000$

α. $f_{12} = (10 + 2000).(1{,}02)^{12} - 2000$

$= (2010)(1{,}02)^{12} - 2000$

$= \dots = 549{,}166$

β. $6000 = (10 + 2000)(1{,}02)^{t} - 2000$

$\Rightarrow 8000 = (2010)(1{,}02)^{t}$

$\Rightarrow \dfrac{8000}{2010} = 1{,}02^{t}$

$\Rightarrow \ln(8000/2010) = t . \ln 1{,}02$

$\Rightarrow t = 69{,}75$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α. $3y_{t+1} = 10y_t - 4$ με $y(0) = 2$

$\Rightarrow y_{t+1} - \frac{10}{3} \cdot y_t = -\frac{4}{3}$ (*)

ΟΜΟΓΕΝΗΣ: $y_{t+1} - \frac{10}{3} \cdot y_t = 0$ άρα $y_h = C \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^t$

ΕΙΔΙΚΗ: $\bar{y}_t = k$ $\bar{y}_{t+1} = k$ άρα:

$k - \frac{10}{3} \cdot k = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow 3k - 10k = -4$

$\Rightarrow 7k = 4$

$\Rightarrow k = \frac{4}{7}$

$\Longrightarrow y_t = C \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^t + \frac{4}{7}$

Για $t = 0 \Rightarrow y_0 = C + \frac{4}{7} \Rightarrow C = y_0 - \frac{4}{7}$

$$\Longrightarrow y_t = \left(y_0 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^t + \frac{4}{7}$$
$$= \left(2 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^t + \frac{4}{7}$$
$$= \left(\frac{10}{7}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^t + \frac{4}{7}$$

(*)

Για την ισορροπία: $y_{t+1} = y_t = y^*$

$\Rightarrow 3y^* = 10y^* - 4$

$\Rightarrow 7y^* = 4$

$\Rightarrow y^* = \frac{4}{7}$

ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \infty \Rightarrow \text{Ασταθής}$$

(και γιατί $\frac{10}{3} > 1$)

ΠΟΡΕΙΑ:

$\left(-\frac{10}{3}\right) \in (-1, -\infty) \Rightarrow$ Μονοτονική [illegible]

β. $y_{t+1} = y_t - (2^t) \cdot 3$ με $y(0) = 4$

Για την ισορροπία: $\nexists$ ισορροπία αφού ο συντελεστής του y_t είναι μονάδα ($y_{t+1} - y_t = 0$)

ΟΜΟΓΕΝΗΣ: $y_{t+1} - y_t = 0$ άρα $y_n = c \rightarrow y_t = y_0$

ΕΙΔΙΚΗ: $\bar{y}_t = \Gamma(2^t)$ $\quad \bar{y}_{t+1} = \Gamma(2^{t+1})$ άρα:

$$\Gamma \cdot 2^{t+1} = \Gamma \cdot 2^t - 3 \cdot 2^t$$

$$\Rightarrow \Gamma \cdot 2^{t+1} - \Gamma \cdot 2^t + 3 \cdot 2^t = 0$$

$$\Rightarrow 2^t (\underbrace{\Gamma \cdot 2 - \Gamma + 3}_{=0}) = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma = -3$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΟΡΙΣΤΗ: $y_t = c - 3 \cdot 2^t$

ΟΡΙΣΜΕΝΗ: Για $t = 0$ $\Rightarrow$ $y_0 = c - 3$

$\Rightarrow$ $c = y_0 + 3$

$\Rightarrow$ $y_t = y_0 - 3 \cdot 2^t + 3$

[Σημείωση: $\frac{dy}{dt} = -3 \cdot 2^t \ln 2$ το οποίο μειώνεται]

c. $y_{t+1} - \frac{1}{2} \cdot y_t = 3$ με $y(0) = 7$

Για την ισορροπία: $y_{t+1} = y_t = y^*$

$\Rightarrow$ $y^* - \frac{1}{2} y^* = 3$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} y^* = 3$

$\Rightarrow$ $y^* = 6$.

ΟΜΟΓΕΝΗΣ: $y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 0$ άρα $y_h = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

ΕΙΔΙΚΗ: $\bar{y}_t = k$ $\bar{y}_{t+1} = k$ άρα

$k - \frac{1}{2} \cdot k = 3$

$\frac{1}{2} k = 3$

$k = 6$

$$\Longrightarrow \quad y_t = c\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$$

Για $t=0 \Rightarrow y_0 = c+6 \Rightarrow c = y_0 - 6$

$$\Longrightarrow \quad y_t = (y_0-6)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$$
$$= (4-6)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$$
$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$$

ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ :

$\lim_{t \to \infty} y_t = 0 + 6 = 6 \Rightarrow$ ευσταθής

(και γιατί $\frac{1}{2} < 1$)

ΤΡΟΧΙΑ :

$\left(-\frac{1}{2}\right) \in (-1, 0) \Rightarrow$ Μονοτονική σύγκλιση

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$u_{t+1} = -(0,2)u_t + 5$$

α. Ισορροπία, άρα $u_{t+1} = u_t = u^*$

$\Rightarrow u^* = -(0,2)u^* + 5$

$\Rightarrow (1,2)u^* = 5$

$\Rightarrow u^* = \frac{5}{1,2} = 4,16$

Άρα θα βρούνε δουλειά περίπου 18 άτομα στα εκατό.

β. Πορεία όρων στην ισορροπία:

$u_0 = 22$

$u_1 = -(0,2) \cdot 22 + 5 = 0,6$

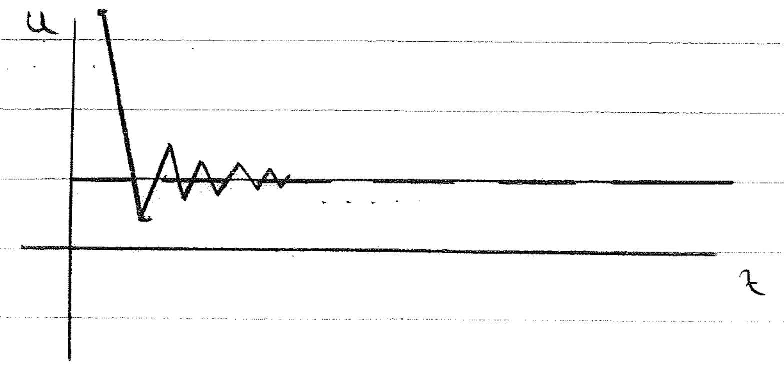
$u_2 = -(0,2) \cdot 0,6 + 5 = 4,88$

$u_3 = -(0,2) \cdot 4,88 + 5 = 4,025$

$u_4 = -(0,2) \cdot 4,025 + 5 = 4,195$

....

$\Rightarrow$ Θα έχω γράφημα της μορφής:



6. Ευστάθεια:

ΟΜΟΓΕΝΗΣ: $u_{t+1} + (0,2)u_t = 0$ άρα $y_h = c\cdot(-0,2)^t$

ΕΙΔΙΚΗ: $\bar{u}_t = k$ $\bar{u}_{t+1} = k$ άρα

$k = -0,2k + 5$

$\Rightarrow 1,2k = 5$

$\Rightarrow k = \frac{5}{1,2} = 4,16$

$\Rightarrow u_t = c\cdot(-0,2)^t + 4,16$

Για $t=0 \Rightarrow u_0 = c + 4,16 \Rightarrow c = u_0 - 4,16$

$\Rightarrow u_t = (u_0 - 4,16)(-0,2)^t + 4,16$

$\lim_{t \to \infty} u_t = 4,16$ άρα ευσταθής.

π.χ αν θέταμε το $u_t = 3,7$, θα επέστρεφε σιγά σιγά στο σημείο ισορροπίας, δηλαδή στο 4,16

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$q_t^D = a + b \cdot P_t$$
$$q_t^S = c + d\, P_t^e$$

Έχουμε επίσης ότι $P_t^e = P_{t-1}$

α. $q_t^D = q_t^S \Rightarrow a + b \cdot P_t = c + d \cdot P_{t-1}$

$$\Rightarrow b \cdot P_t = c - a + d \cdot P_{t-1}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{c-a}{b} + \frac{d}{b} \cdot P_{t-1}$$

$$\Rightarrow P_t - \frac{d}{b} \cdot P_{t-1} = \frac{c-a}{b}$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ: $P_t - \frac{d}{b} \cdot P_{t-1} = 0$ άρα $P_h = A \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^t$

ΕΙΔΙΚΗ: $\bar{P}_t = k \quad \bar{P}_{t-1} = k$ άρα

$$k - \frac{d}{b} \cdot k = \frac{c-a}{b}$$

$$\Rightarrow k \cdot \left(1 - \frac{d}{b}\right) = \frac{c-a}{b}$$

$$\Rightarrow k \cdot \left(\frac{b-d}{b}\right) = \frac{c-a}{b}$$

$$\Rightarrow k = \frac{c-a}{b-d}$$

$$\Longrightarrow P_t = A \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c-a}{b-d}$$

Για $t=0 \Rightarrow P_0 = A + \frac{c-a}{b-d} \Rightarrow A = P_0 - \frac{c-a}{b-d}$

$$\Longrightarrow \quad P_t = \left(P_0 - \frac{c-a}{b-d}\right)\cdot\left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c-a}{b-d}$$

B. Σημ. ισορροπίας $\Longrightarrow \quad P_{t-1} = P_t = P^*$

$$\Longrightarrow \quad P^* - \frac{d}{b}\cdot P^* = \frac{c-a}{b}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1 - \frac{d}{b}\right)\cdot P^* = \frac{c-a}{b}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{b-d}{b}\right) P^* = \frac{c-a}{b}$$

$$\Longrightarrow \quad P^* = \frac{c-a}{b-d}$$

c. Το $\lim\limits_{t\to\infty} P_t = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\left(P_0 - \frac{c-a}{b-d}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c-a}{b-d}\right]$

Περιπτώσεις:

$\frac{d}{b} < 1$ τότε $\lim\limits_{t\to\infty} P_t = \underline{\frac{c-a}{b-d}}$ Ευσταθής

Σημείο Ισορροπίας

$\frac{d}{b} = 1$ τότε $\nexists$ ισορροπία

$\frac{d}{b} > 1$ τότε $\lim\limits_{t\to\infty} P_t = \infty$ Ασταθής