ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 11 – ΛΥΣΕΙΣ

1α $y_t + 2y_{t-1} + y_{t-2} = 2$ (1), $y(0)=1$, $y(1)=2$.

Βήμα 1: Λύση Ομογενούς (γένους.

Χαρακτηριστική Εξίσωση $\quad y_t + 2y_{t-1} + y_{t-2} = 0$

Δοκιμή $y^h_t = \lambda^t$, $y^h_{t-1} = \lambda^{t-1}$, $y^h_{t-2} = \lambda^{t-2}$, $\lambda \neq 0$

Αντικατάσταση $\quad \lambda^t + 2\lambda^{t-1} + \lambda^{t-2} = 0$

κοινός παράγοντας λ^{t-2}: $\quad \lambda^{t-2}\left[\lambda^2 + 2\lambda + 1\right] = 0$

Ριζες : $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = -1$ (διπλή ρίζα).

οπότε, σύμφωνα με το αντίστοιχο θεώρημα:

γενική λύση ομογενούς: $\boxed{y^h = A_1(-1)^t + A_2 t(-1)^t}$

Βήμα 2 Ειδική Λυση

Δοκιμη: $\bar{y}_t = k$, $y_{t-1} = k$ (μια περίοδος πίσω), $y_{t-2} = k$ (δύο περιόδους πίσω)

Αντικατάσταση στην (1):

$k + 2k + k = 2 \Rightarrow 4k = 2 \quad k = \frac{1}{2}$

ΑΡΑ ΕΙΔΙΚΗ $\boxed{\bar{y}_t = \frac{1}{2}}$

Βήμα 3 ΓΕΝΙΚΗ ΑΟΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ (Βήμα 1 + Βήμα 2)

$$\boxed{y_t = A_1(-1)^t + A_2 t(-1)^t + \frac{1}{2}} \quad (2)$$

Βήμα 4 ΓΕΝΙΚΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

$y(0)=1$ στην (2) $\quad 1 = A_1 + \frac{1}{2}$

$y(1)=2$ στην (2) $\quad 2 = A_1(-1)^1 + A_2(-1)^1 + \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\boxed{A_1 = \frac{1}{2}}$ $\boxed{A_2 = -2}$

1.b. $y_t - 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 2$ (1) (Συνοπτική λύση για λεπτομέρεια ο ίδιος τρόπος με 1α)

$y(0)=1,\ y(1)=2.$

Βήμα 1: Χαρακτηριστική εξίσωση ομογενούς μέρους

$$\lambda - 5\lambda + 6 = 0$$

Ρίζες $\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3$

Άρα. $y^h_t = A_1(-2)^t + A_2(3)^t$

Βήμα 2: Ειδική Λύση $\bar{y}_t = k, \quad \bar{y}_{t-1} = k, \quad \bar{y}_{t-2} = k$

$$k - 5k + 6k = 2 \qquad 2k = 2, \quad k = 1$$

Βήμα 3: Γενική Αόριστη Λύση:

$$\boxed{y_t = A_1(-2)^t + A_2(3)^t + 1} \quad (2)$$

Βήμα 4: Γενική Ορισμένη Λύση:

$y(0)=1$ στην (2) $\quad 1 = A_1(-2)^0 + A_2(3)^0 + 1$

$y(0)=2$ στην (2) $\quad 2 = A_1(-2)^1 + A_2(3)^1 + 1$

$$1 = -A_1 + A_2 + 1 \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$2 = -2A_1 + A_2 3 + 1 \Rightarrow 1 = -2A_1 + 3A_1 \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}, \boxed{A_2 = 1}$$

$$\boxed{y_t = -2^t + 3^t + 1}$$

1.c $\boxed{y_t + 5y_{t-1} - 6y_{t-2} = 2}$ (1) , $y(0)=1$, $y_0(1)=2$.

Βήμα 1: Χαρακτηριστική Εξίσωση: $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -6$$

Λυση ομογενούς: $\boxed{y_t^h = A_1(1)^t + A_2(-6)^t}$

Βήμα 2: Ειδική Λυση: Δοκιμή: $\bar{y}_t = \xi$, $\bar{y}_{t-1} = \xi$, $\bar{y}_{t-2} = \xi$

μας δίνει $\xi + 5\xi - 6\xi = 2$ $\quad 0\cdot\xi = 2$ **ΑΤΟΠΟ**

άρα πρέπει να αλλάξουμε δοκιμή (δεν μπορούμε να βρούμε το ξ)

Δοκιμή 2: $\boxed{y_t = \xi t, \quad y_{t-1} = \xi(t-1), \quad y_{t-2} = \xi(t-2)}$ ⇒ δύο περιόδους πίσω.

Αντικατάσταση στην (1)

$$\xi t + 5\xi(t-1) - 6\xi(t-2) = 2$$

$$\cancel{\xi t} + \cancel{5\xi t} - 5\xi - \cancel{6\xi t} + 12\xi = 2 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{2}{7}}$$

Άρα Ειδική $\boxed{\bar{y}_t = \frac{2}{7}t}$

Βήμα 3: Γενική Αοριστη Λυση

$$\boxed{y_t = A_1(1)^t + A_2(-6)^t + \frac{2}{7}t}$$

ΟΡΙΣΜΕΝΗ

Βήμα 4: Γενική Λύση:

Από $y(0)=1$ στην (2) $\quad 1 = A_1 + A_2$

Από $y(1)=2$ στην (2) $\quad 2 = A_1 - 6A_2 + \frac{2}{7}$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{54}{49}}, \quad \boxed{A_2 = -\frac{5}{49}}$$

$$\boxed{y_t = \frac{54}{49}(1)^t - \frac{5}{49}(-6)^t + \frac{2}{7}t}$$

2a

1

$$J = \int_0^{10} \left(K - (0,5)K^2 - I^2 \right) dt$$

Βήμα 1 $\quad \dot{K} = I - (0,1)K \qquad K(0) = 10$

K state variable

I control variable

$$H = K - 0,5K^2 - I^2 + \lambda \left[I - (0,1)K \right]$$

Βήμα 2 Συνθήκες Αναγκαίες για Μέγιστο.

2.1 I control, K state.

2.2. $\boxed{\frac{\partial H}{\partial I} = 0} \Rightarrow -2I + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2I}$ (1)

$\boxed{\frac{\partial H}{\partial K} = -\dot{\lambda}} \Rightarrow \boxed{1 - (0,5)(2)K - (0,1)\lambda = -\dot{\lambda}}$ (2)

$\boxed{\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{K}} \Rightarrow \boxed{\dot{K} = I - (0,1)K}$ (3)

$\boxed{\lambda(10) = 0}$ (4) ΤΕΡΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

Βήμα 3: Άλγεβρα

(1) $\lambda = 2I$ παράγωγος w.r.t. (t) $\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial 2I}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$

$1 \cdot \boxed{\dot{\lambda} = 2 \cdot \dot{I}}$ (1)'

(1), (1)' $\Rightarrow$ (2) $\quad 1 - (0,5)\cancel{2}K - (0,1)\cancel{2}I = -\cancel{2}\dot{I}$

$$\boxed{\dot{I} = (0,1)I + 0,5K - \frac{1}{2}}$$

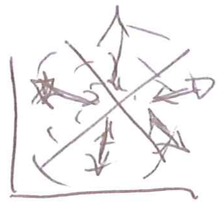
ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{K} &= I - (0,1)K \quad (1) \\ \dot{I} &= (0,1)I + (0,5)K - \frac{1}{2} \quad (2) \end{aligned}}$$

$\dot{K} = 0, \; \dot{I} = 0 \rightarrow$ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

$$\boxed{\begin{aligned} I^* &= 0,09 \\ K^* &= 0,98 \end{aligned}}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ κ' ΤΡΟΧΙΑΣ



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\delta = det = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}49 >$$

$$\tau = trace = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$(1{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}49 = 0{,}29$$

Δεσμιός

$\tau > 0$ Ασταθής δεσμός

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Βήμα 1 Χαρακτηριστική εξίσωση.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}5-\lambda \end{bmatrix} = \quad det|J|$$

$$(1-\lambda)(0{,}5-\lambda) + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$0{,}5 - \lambda - (0{,}5)\lambda + \lambda^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$\lambda^2 - (1{,}5)\lambda + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0{,}97} \qquad \boxed{\lambda_2 = 0{,}52}$$

$Y(t)$

$$Y(t) = C_1^1 \cdot B_1 \cdot e^{(0{,}97)t} + C_2^1 B_2 e^{0{,}52t}$$

$$I(t) = C_1^2 \cdot B_1 e^{0{,}97t} + C_2^2 B_2 e^{0{,}52t}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,5-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-0,97 & -0,1 \\ 0,1 & 0,5-0,97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{0,03 \cdot C_1^1 - 0,1\, C_1^2 = 0}$$

Έστω $\boxed{C_1^1 = 1}$

$$\boxed{C_1^2 = \frac{0,03}{0,1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1-0,52 & -0,1 \\ 0,1 & 0,5-0,52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0,48 \cdot C_2^1 - 0,1\, C_2^2 = 0$$

$$\boxed{C_2^1 = 1} \qquad \boxed{C_2^2 = \frac{0,48}{0,1}}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΑΟΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

ΓΕΝΙΚΗ ΑΟΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

$$K(t) = B_1 e^{(0,97)t} + B_2 e^{(0,52)t} + 0,98 \quad (5)$$

$$I(t) = \frac{0,03}{0,1} B_1 e^{(0,97)t} + \frac{0,48}{0,1} B_2 e^{(0,52)t} + 0,09 \quad (6)$$

$K(10) = 10 \Rightarrow B_1 + B_2 + 0,98 = 10$

$\lambda(10) = 0$ από (1) $\lambda(10) = 2I(10) \Rightarrow I(10) = 0$

ΓΕΝΙΚΗ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΛΥΣΗ

Απο την τερματική συνθήκη γνωρίζουμε ότι $\lambda(10) = 0$

αφού απο την (1) $\lambda = 2I$ για οποιοδήποτε t

δηλαδή, $\lambda(t) = 2I(t)$ τότε για $t=10$

$\lambda(10) = 2I(10)$ κι επειδή $\lambda(10)=0$

$$\Downarrow$$

$$0 = 2I(10) \Rightarrow \boxed{I(10)=0}$$

Απο την Αρχική συνθήκη: $\boxed{K(0)=10}$

οπότε απο την (5)

$K(0)=10 \Rightarrow$ $10 = B_1 + B_2 + 0{,}98$

απο την (6)

$I(10)=0 \Rightarrow$ $0 = \left(\frac{0{,}03}{0{,}1}\right) B_1 e^{(0{,}97)\cdot 10} + \left(\frac{0{,}48}{0{,}1}\right) B_2 e^{(0{,}52)(10)} + 0{,}09$

$\Downarrow$ Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$$B_1,\ B_2$$

Η λύση είναι πλήρως σωστή ως εδώ. Χρειάζεται ηλεκτρονικός υπολογιστής ή calculator για να βρεθούν τα B_1, B_2 σε αυτό το γραμμικό σύστημα.

(2b) $J = \int_0^\infty (K - (0,5)K^2 - I^2) \cdot e^{-0,02t}\, dt$ s.t. $\dot{K} = I - (0,2)K$

(5)

Βήμα 1: Hamiltonian

$$H = (K - (0,5)K^2 - I^2) \cdot e^{-0,02t} + \lambda [I - (0,2)K]$$

Βήμα 2: Control I, State K: Συνθήκες Αναγκαίες.

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial I} = 0} \quad -2I \cdot e^{-0,02t} + \lambda = 0$$

$$\boxed{\lambda = 2I\, e^{(0,02)t}} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial K} = -\dot{\lambda}} \quad (1 - (0,5)2K)\, e^{-0,02t} - (0,2)\lambda = -\dot{\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{K} \Rightarrow \boxed{\dot{K} = I - (0,2)K} \quad (3)$$

$$\lim_{t \to \infty} K(t) \cdot \lambda(t) = 0 \quad (4)$$

$\boxed{\text{Βήμα 3}}$ Άλγεβρα: → Παραγωγίζω ως προς το χρόνο την (1)

$$\boxed{\dot{\lambda} = 2 \cdot \dot{I}\, e^{-(0,02)t} - 2 \cdot (0,02)\, I\, e^{-(0,02)t}} \quad (1)'$$

Αντικατάσταση (1) κ' (1)' ⇒ στην (2)

$$(1 - (0,5)2K)\, \cancel{e^{-0,02t}} - (0,2)\, 2I\, \cancel{e^{-(0,02)t}} = -2\dot{I}\, \cancel{e^{-(0,02)t}} + 2(0,02) I\, \cancel{e^{-(0,02)t}}$$

$$1 - (0,5)2K - (0,2) \cdot 2I - 2(0,02) I = -2\dot{I}$$

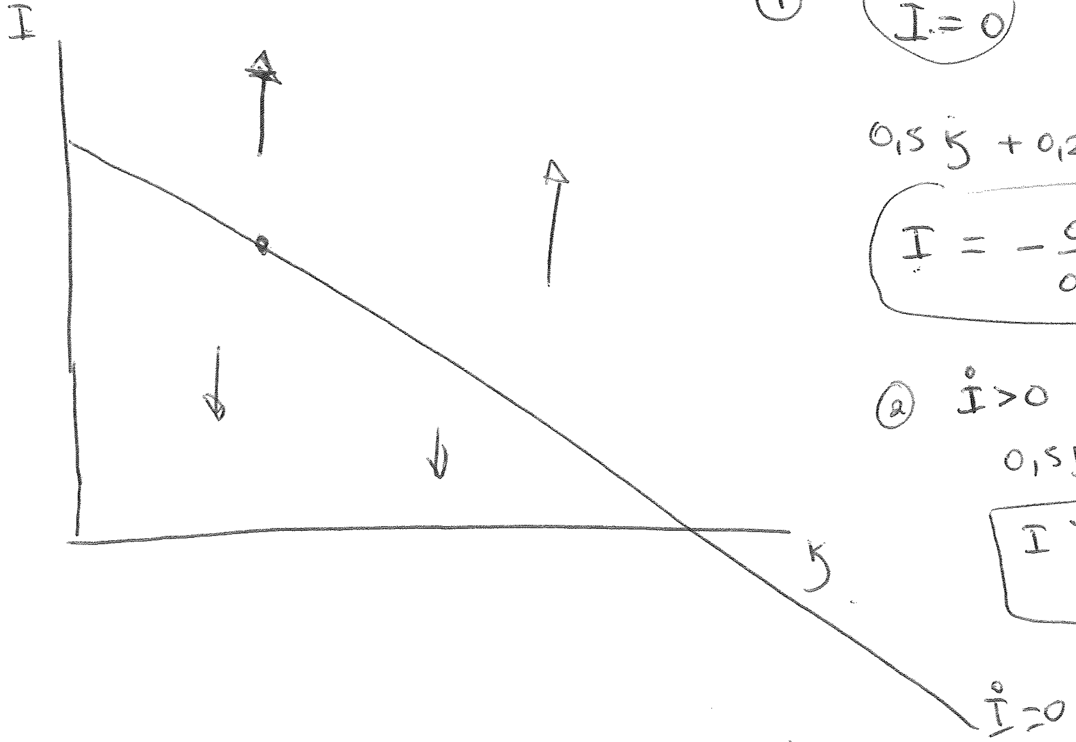
$$\boxed{\dot{I} = (0,5)K + (0,2 + 0,02) I - \frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\boxed{\dot{K} = I - (0,2)K} \quad (3)$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{I} &= (0,5)K + (0,22)I - \frac{1}{2} \\ \dot{K} &= I - (0,2)K\end{aligned}}$$



① $\dot{I}=0$

$0,5K + 0,22I - \frac{1}{2} = 0$

$$\boxed{I = -\frac{0,5}{0,22}K + \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{0,22}}$$

② $\dot{I}>0$

$0,5K + 0,22I - \frac{1}{2} > 0$

$$\boxed{I > -\frac{0,5}{0,22}K + \frac{1/2}{0,22}}$$

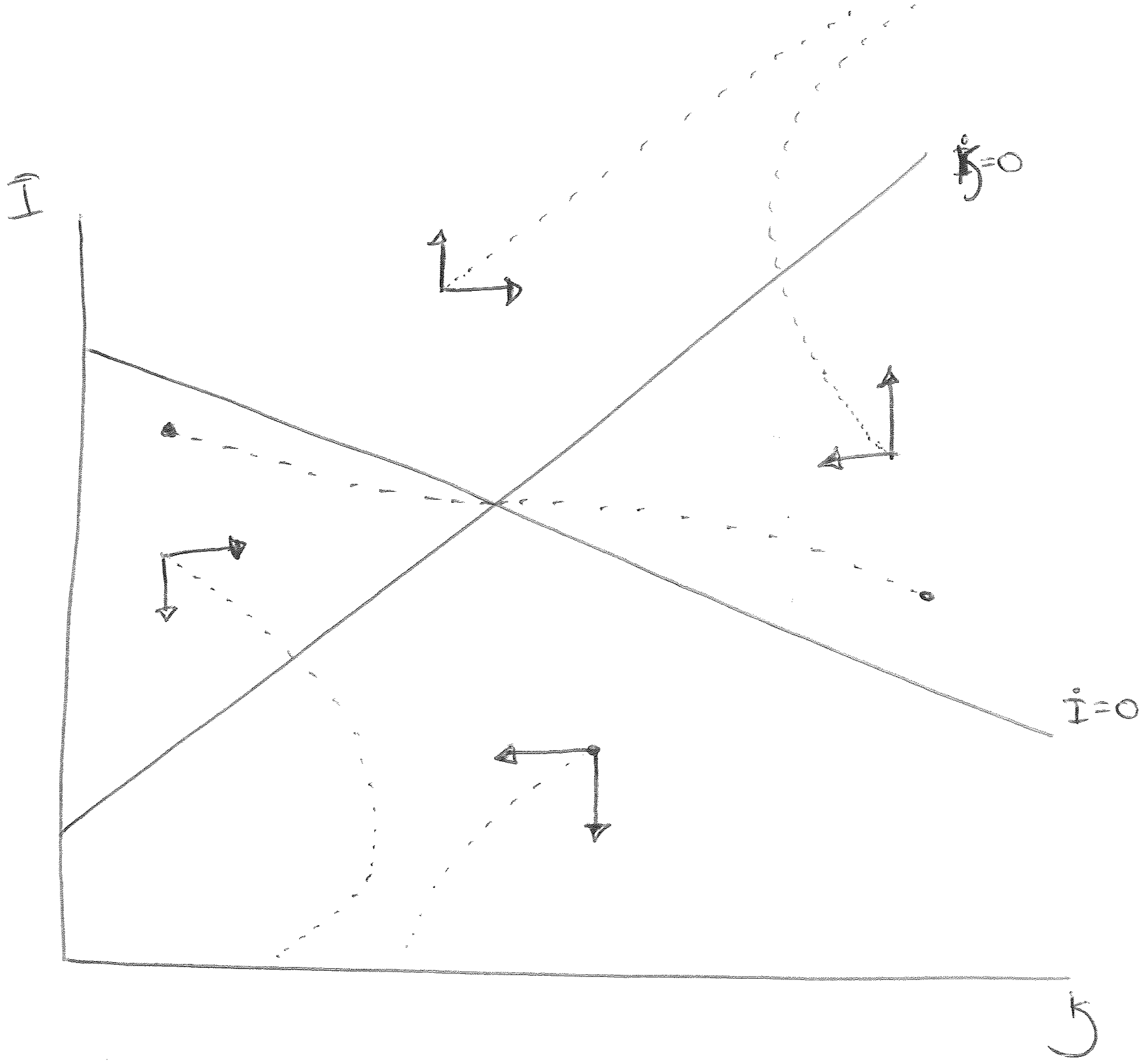
$\dot{K}=0 \Rightarrow$

$I = 0,2K$

$\dot{K}>0 \quad I - 0,2K > 0$

$I > 0,2K$

Και τα δύο διαγράμματα μαζί.



Το σύστημα παρουσιάζει σαγματική τροχιά.