ΟΙΚ 223: Μαθηματικά για οικονομολόγους ΙΙ

Διδάσκων: Ευάγγελος Β. Διοικητόπουλος

Φροντιστήρια: Ανδρέου Σοφία, Καδής Κυριάκος, Κωνσταντίνου Μοδέστια.

Σετ ασκήσεων 9 - Λύσεις

(Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων - Ευστάθεια Δυναμικής Ισορροπίας)

1) Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, να βρεθεί το σημείο ισορροπίας και να κάνετε ανάλυση της δυναμικής πορείας και ευστάθειας τους.

a) $\dot{y}_1 = y_2 - 2, \;\; y_1(0) = 3,$

$\dot{y}_2 = y_1 - 1, \;\; y_2(0) = 3.$

Ισορροπία:

$\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 0$. Άρα, $y_1^* = 1, y_2^* = 2$.

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

Άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Χαρακτηριστικό Ιδιοδιάνυσμα:

Για την ρίζα $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-c_1^1 + c_1^2 = 0$. Θέτουμε ότι $c_1^1 = 1$ άρα $c_1^2 = 1$.

Για την ρίζα $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_2^1 + c_2^2 = 0$. Θέτουμε ότι $c_2^1 = 1$ άρα $c_2^2 = -1$.

Γενική Αόριστη Λύση (Ομογενής + Ειδική):

$$y_1(t) = B_1 c_1^1 e^{\lambda_1 t} + B_2 c_2^1 e^{\lambda_2 t} + y_1^* \Rightarrow y_1(t) = B_1 e^t + B_2 e^{-t} + 1$$

$$y_2(t) = B_1 c_1^2 e^{\lambda_1 t} + B_2 c_2^2 e^{\lambda_2 t} + y_2^* \Rightarrow y_2(t) = B_1 e^t - B_2 e^{-t} + 2$$

Γενική Ορισμένη Λύση:

Από την γενική λυση της $y_1(t)$ για $t=0$, $y_1(0) = B_1 + B_2 + 1 \Rightarrow 3 = B_1 + B_2 + 1$

Από την γενική λυση της $y_2(t)$ για $t=0$, $y_2(0) = B_1 - B_2 + 2 \Rightarrow 3 = B_1 - B_2 + 2$

όπου απο τη λύση βρίσκουμε ότι $B_1 = \frac{3}{2}, B_2 = \frac{1}{2}$. Άρα η γενική ορισμένη λύση είναι ως:

$$y_1(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + 1$$

$$y_2(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 2$$

Δυναμική Ανάλυση:

Η μήτρα του συστήματος δίνεται

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου το ίχνος δίνεται απο $tr(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, και η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$.Γνωρίζουμε ότι όταν η ορίζουσα ενός δυναμικού συστήματος είναι αρνητική, τότε το η δυναμίκη ευστάθεια και πορεία του συστήματος χαρακτηρίζεται απο σαγματικό μονοπάτι.

b) $\dot{y}_1 = -2y_1 + 2y_2 + 12, \quad y_1(0) = -2,$

$\dot{y}_2 = y_1 - 3y_2 - 12, \;\; y_2(0) = 5.$

Ισορροπία:

1ος τρόπος $\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 0$ και λύνουμε το σύστημα με αντικαταστάση όπου $y_1^* = 3, y_2^* = -3$.

2ος τρόπος

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6-2} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-6 \\ 3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 - (-2-3)\lambda + (6-2) = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

Άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$.

Χαρακτηριστικό Ιδιοδιάνυσμα:

Για την ρίζα $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} -2+1 & 2 \\ 1 & -3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-c_1^1 + 2c_1^2 = 0$. Θέτουμε ότι $c_1^1 = 1$ άρα $c_1^2 = \frac{1}{2}$.

Για την ρίζα $\lambda_2 = -4$

$$\begin{bmatrix} -2+4 & 2 \\ 1 & -3+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2c_2^1 + 2c_2^2 = 0$. Θέτουμε ότι $c_2^1 = 1$ άρα $c_2^2 = -1$.

Γενική Αόριστη Λύση (Ομογενής + Ειδική):

$$y_1(t) = B_1 c_1^1 e^{\lambda_1 t} + B_2 c_2^1 e^{\lambda_2 t} + y_1^* \Rightarrow y_1(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-4t} + 3$$

$$y_2(t) = B_1 c_1^2 e^{\lambda_1 t} + B_2 c_2^2 e^{\lambda_2 t} + y_2^* \Rightarrow y_2(t) = B_1 \frac{1}{2} e^{-t} - B_2 e^{-4t} - 3$$

Γενική Ορισμένη Λύση:

$$\text{Από την γενική λυση της } y_1(t) \text{ για } t = 0,\ y_1(0) = B_1 + B_2 + 3 \Rightarrow -2 = B_1 + B_2 + 3$$

$$\text{Από την γενική λυση της } y_2(t) \text{ για } t = 0,\ y_2(0) = \frac{1}{2} B_1 - B_2 - 3 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} B_1 - B_2 - 3$$

όπου απο τη λύση βρίσκουμε ότι $B_1 = 2, B_2 = -7$. Άρα η γενική ορισμένη λύση είναι ως:

$$y_1(t) = 2e^{-t} - 7e^{-4t} + 3$$

$$y_2(t) = e^{-t} + 7e^{-4t} - 3$$

Δυναμική Ανάλυση:

Η μήτρα του συστήματος δίνεται

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

όπου το ίχνος δίνεται απο $\zeta = tr(A) = a_{11} + a_{22} = -5$, και η ορίζουσα $\xi = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4$.Γνωρίζουμε ότι όταν η ορίζουσα ενός δυναμικού συστήματος είναι θετική τότε πρέπει να εξετάσουμε την σχέση $\zeta^2 - 4\xi = 16 - 16 = 0$, όπου συμπεραίνουμε ότι το είδος της δυναμικής πορείας είναι δεσμός. Επίσης, επειδή $\zeta < 0$ το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Συνοπτικά, το είδος δυναμικής ανάλυσης είναι ευσταθής δεσμός.

c) $\dot{y}_1 = 6y_1 - 8y_2 + 4, \quad y_1(0) = -1,$

$\dot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2 - 3, \;\; y_2(0) = 2.$

Ισορροπία:

$\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 0$ και λύνουμε το σύστημα με αντικαταστάση όπου $y_1^* = 8, y_2^* = \frac{13}{2}$.

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 - (6-2)\lambda + (-12+16) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι μηδέν και οι χαρακτηριστικές ρίζες (δηπλή ρίζα) είναι οι $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 2$.

Χαρακτηριστικό Ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -8 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$4c^1 - 8c^2 = 0$. Θέτουμε ότι $c^1 = 1$ άρα $c^2 = \frac{1}{2}$.

Για την ρίζα $c^1 = 1$ και $c^2 = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -8 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n^1 \\ n^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$4n^1 - 8n^2 = 1$. Θέτουμε ότι $n^1 = 1$ άρα $n^2 = \frac{3}{8}$.

Γενική Αόριστη Λύση (Ομογενής + Ειδική): Επειδή η ορίζουσα είναι ίση με το μηδέν και έχουμε διπλή ρίζα η γενικη λύση δίνεται ώς:

$$y_1(t) = B_1c^1e^{\mu t} + B_2(n^1 + c^1t)e^{\mu t} + y_1^* \Rightarrow y_1(t) = B_1e^{2t} + B_2(1+t)e^{2t} + 8$$

$$y_2(t) = B_1c^2e^{\mu t} + B_2(n^2 + c^2t)e^{\mu t} + y_2^* \Rightarrow y_2(t) = B_1\frac{1}{2}e^{2t} + B_2(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}t)e^{2t} + \frac{13}{2}$$

Γενική Ορισμένη Λύση:

$$\text{Από την γενική λυση της } y_1(t) \text{ για } t = 0,\ y_1(0) = B_1 + B_2 + 8 \Rightarrow -1 = B_1 + B_2 + 8$$

$$\text{Από την γενική λυση της } y_2(t) \text{ για } t = 0,\ y_2(0) = \frac{1}{2}B_1 - B_2 - 3 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}B_1 + \frac{3}{8}B_2 + \frac{13}{2}$$

όπου απο τη λύση του συστήματος βρίσκουμε ότι $B_1 = -9, B_2 = 0$. Άρα η γενική ορισμένη λύση είναι:

$$y_1(t) = -9e^{2t} + 8$$

$$y_2(t) = -\frac{9}{2}e^{2t} + \frac{13}{2}$$

Δυναμική Ανάλυση:

Η μήτρα του συστήματος δίνεται

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

όπου το ίχνος δίνεται απο $\zeta = tr(A) = a_{11} + a_{22} = 4$, και η ορίζουσα $\xi = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4$.Γνωρίζουμε ότι όταν η ορίζουσα ενός δυναμικού συστήματος είναι θετική τότε πρέπει να εξετάσουμε την σχέση $\zeta^2 - 4\xi = 16 - 16 = 0$, όπου συμπεραίνουμε ότι το είδος της δυναμικής πορείας είναι δεσμός. Επίσης, επειδή $\zeta > 0$ το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Συνοπτικά, το είδος δυναμικής ανάλυσης είναι ασταθής δεσμός.